

Оценка вероятности дефолта на основе рыночной информации

Роман В. Литвинов
ОАО «Уралсиб»

06 декабря 2012г.

- 1. Модели сокращенной формы (reduced-form models).**
кредитные спреды и кредитная кривая;
риск-нейтральное ценообразование кредитных инструментов.
- 2. Структурные модели (structural models).**
базовая модель Мертона;
подход Moody's KMV.
- 3. Практические аспекты моделирования. Трудности и проблемы.**

Модели сокращенной формы. Кредитный спред и локальная PD

Модели сокращенной формы не делают каких-либо предпосылок о фундаментальных причинах наступления дефолта, а моделируют дефолт как событие, которое наступает случайно в некоторый неизвестный момент времени.

Локальная вероятность дефолта в момент t на следующий бесконечно малый отрезок времени (шаг) Δt приблизительно пропорциональна длине отрезка времени, короткий кредитный спред – коэфф. пропорциональности (Schonbucher, 2003).

$$\frac{1}{\Delta t} Q[\tau \leq t + \Delta t | \mathcal{F}_t \wedge \{\tau > t\}] \approx \bar{r}(t) - r(t) =: \lambda(t)$$

$$\text{где } \bar{r}(t) = \bar{f}(t, t) \text{ и } r(t) = f(t, t)$$

Credit triangle formula для вычисления PD с учетом покрытия (Duffie, 1998):

$$\lambda(t) = S(t) / (1-R)$$

Конструирование и калибровка кредитной кривой: шаги

1. Калибровка безрисковой кривой.

строим временную структуру безрисковой ставки.

2. Калибровка/ оценка коэффициента покрытия.

на базе статистических данных (собственные, сторонние);

совместная калибровка (joint calibration) с включением дополнительных калибровочных инструментов (market implied recovery).

3. Калибровка спредов.

процедура аналогична шагу 1;

нехватка данных (небольшое количество калибровочных инструментов данного эмитента).

Конструирование и калибровка кредитной кривой: решения

Решения:

Временная структура hazard rates параметризуется с использованием функциональной формы с несколькими параметрами (линейная, квадратичная, Nielsen-Siegel, проч.).

Полу-параметрическая и непараметрическая калибровка кривой (bootstrap, сплайны).

Агрегированные временные структуры для заданного рейтинга и отрасли (агрегированными кривыми можно закрывать разрывы во временной структуре конкретного эмитента).

Дополнительная задача: Выбор адекватного набора калибровочных инструментов и проблема «выбросов».

Конструирование и калибровка кредитной кривой: пример

Конструирование кредитной кривой для МТС (данные на 14.05.2010г.):

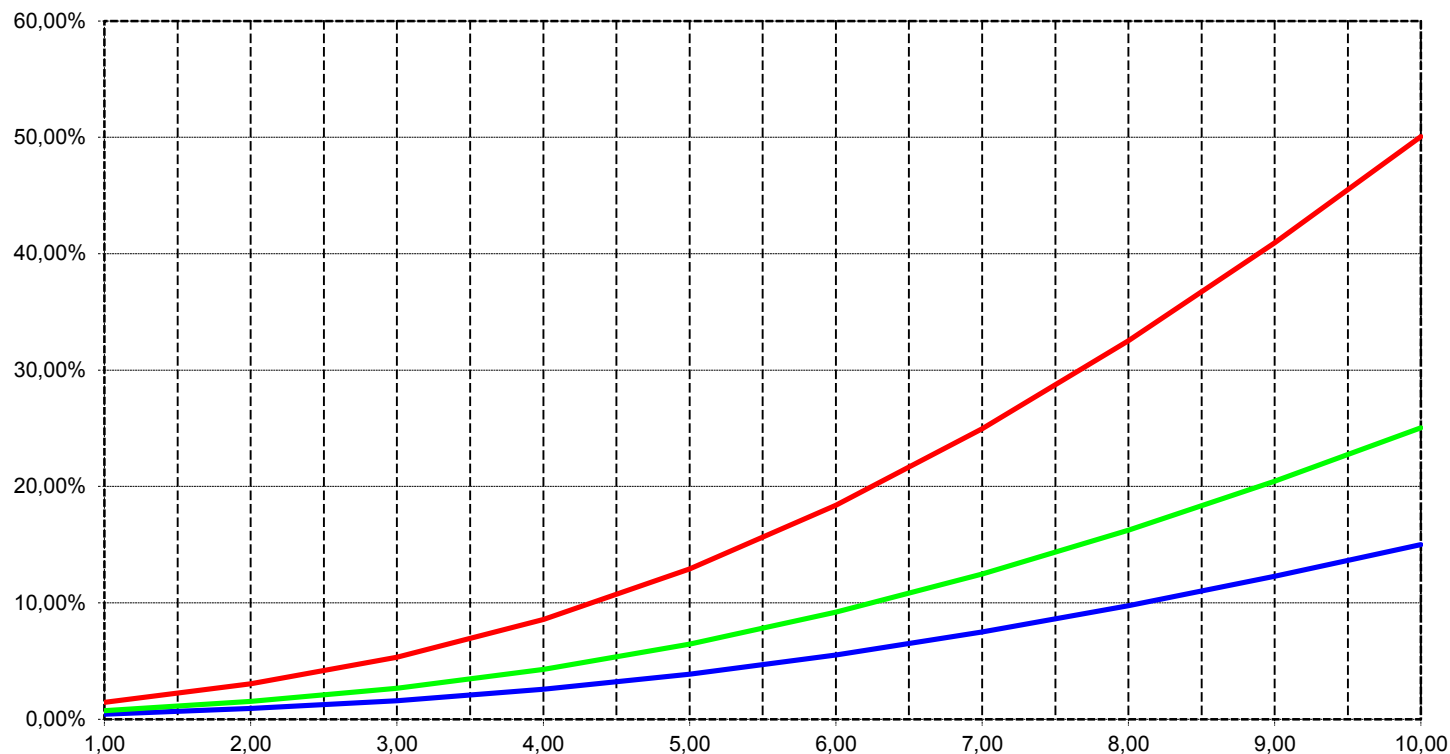
Бумага	Объем	Валюта	Дата	τ	купон	coupon		
	эмиссии,		погашения/ оферты			frequency	yield	mid
млрд.руб.								
МТС, 4	15	RUR	19.05.2011	111.46	16.75%	1	6.95%	109.28
МТС, 5	15	RUR	24.07.2012	112.64	14.25%	1	7.47%	113.22
МТС, 1	10	RUR	17.10.2013	113.87	7.00%	1/2	8.75%	95.38
МТС, 2	10	RUR	20.10.2015	115.88	7.75%	1/2	8.87%	96.00

Временная структура безрисковой ставки (ГКО-ОФЗ, данные Micex, Nielsen-Siegel параметризация);

Строим структуру для различных коэффициентов покрытия;

Кредитная кривая базируется на интерполированной кривой временной структуры вероятностей выживания. Интерполяция с применением кубического экспоненциального сплайна (cubic exponential spline) (Vasicek, Fong, 1982).

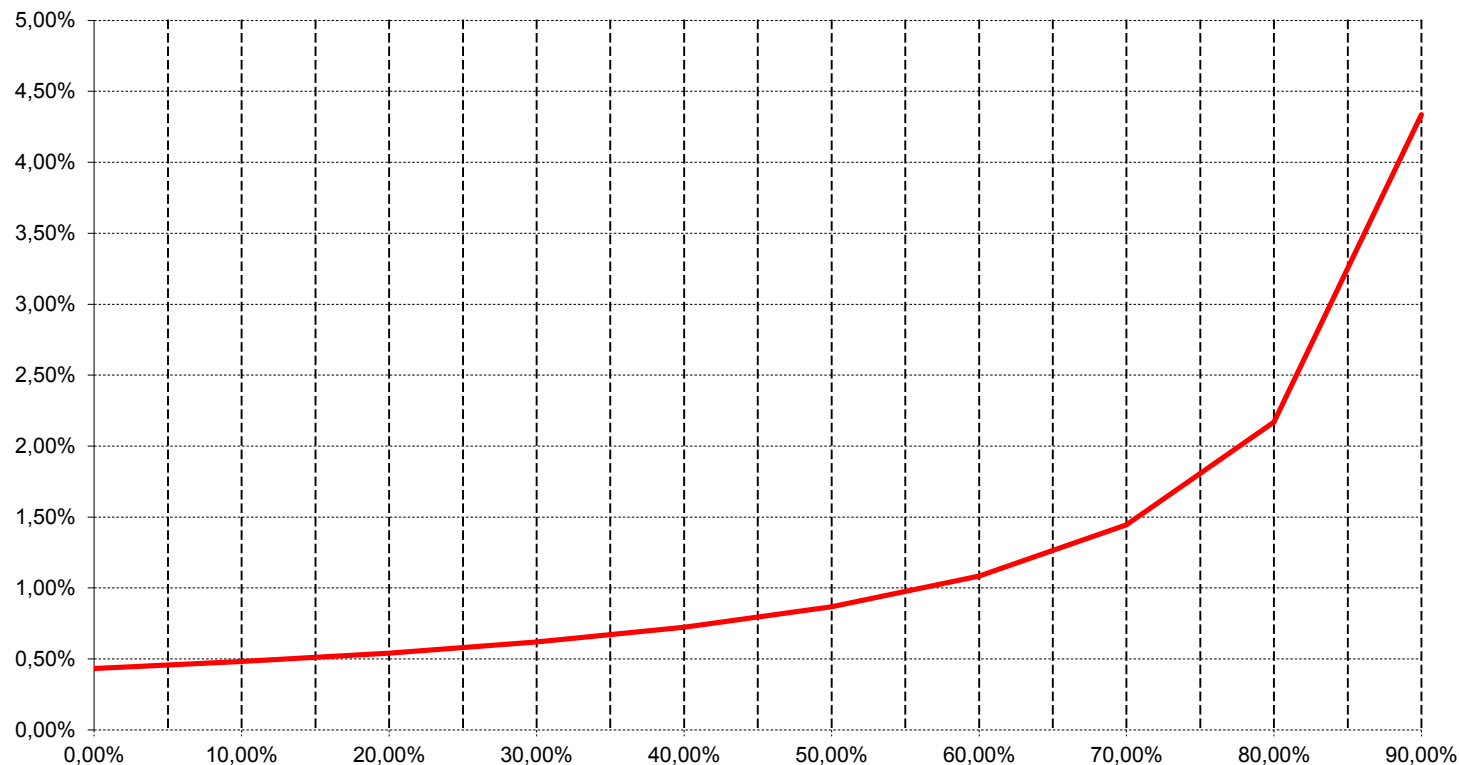
Конструирование и калибровка кредитной кривой: пример



Default intensity term structure. MTC, 14.05.2010г.

- zero recovery; - recovery = 45%; - recovery = 70%

Конструирование и калибровка кредитной кривой: пример



Чувствительность годовой вероятности дефолта (ось y) к величине коэффициента покрытия (ось x).

Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS

При использовании риск-нейтральной меры стоимость любого условного обязательства есть математическое ожидание стоимости дисконтированных платежей этого инструмента.

Цена инструмента = E (дисконтированные платежи по инструменту)

Обратная задача. Берем формулу оценки стоимости инструмента и его существующие рыночные цены и решаем уравнение относительно вероятности дефолта контрагента.

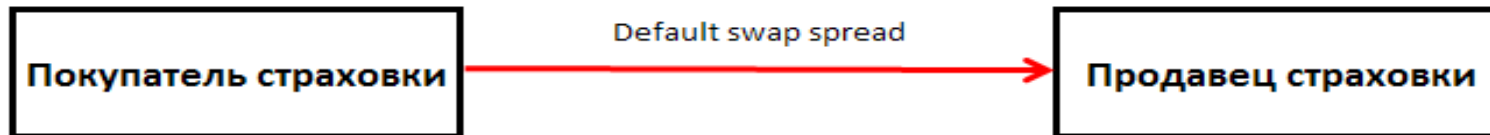
Такие оценки PD называются **подразумеваемыми** (implied). Это не статистические (исторические) оценки PD, базирующиеся на исторических данных о количествах дефолтов.

Значения вероятностей дефолта, которые нужно «подставить» в формулу ценообразования инструмента в риск-нейтральном сеттинге, чтобы получить наблюдаемую на рынке стоимость инструмента.

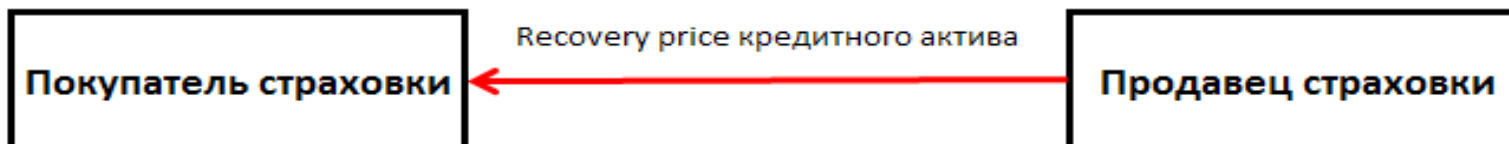
Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS

Механика CDS:

Premium leg:



Protection leg. После кредитного события (credit event):



Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS

Текущая стоимость premium leg (серия платежей):

$$PL\ PV(t_V, t_N) = S(t_0, t_{N0}) \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n, B) Z(t_V, t_n) SP(t_V, t_n)$$

- $\Delta(t_{n-1}, t_n, B)$ – продолжительность отрезка между двумя дата выплаты премии t_{n-1} и t_n в соответствующей базе расчета B .
- $SP(t_V, t_n)$ - это риск-нейральная вероятность выживания reference эмитента с даты прайсинга t_V до даты выплаты премии t_n .
- $Z(t_V, t_n)$ - дисконтирующий член (фактор). В нашем случае это Libor discount factor. Дисконтирующая функция - своп-кривая в долларах.

Уравнение не учитывает «**эффект накопленной премии**». Есть приемлемые проксимации для учета эффекта (O’Kane, Turnbull, 2003).

Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS

Без существенной потери в точности, можно допустить: дефолт может наступить на протяжении года только в конечном числе дискретных точек M . Для CDS со сроком погашения t_N , будет $M \times t_N$ точек. Тогда:

$$PR PV(t_V, t_N) = (1 - R) \sum_{m=1}^{M \times t_N} Z(t_V, t_m) (SP(t_V, t_{m-1}) - SP(t_V, t_m))$$

Меньше M , меньше вычислений. Приемлемый уровень точности соблюдается при $M = 12$ (т.е. ежемесячная дискретизация) и укладывается в типичный bid-ask спред (O'Kane, Turnbull, 2003). Модель в этом случае будет быстрой, простой и достаточно точной.

Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS

Подразумеваемая безарбитражность:

$$PR PV(t_V, t_N) = PL PV(t_V, t_N)$$

С помощью соотв. уравнений, получим (для дискретного случая):

$$\begin{aligned} \frac{S(t_V, t_{V+1Y})}{1 - R} \sum_{n=3,6,9,12} \Delta(t_{n-3}, t_n, B) Z(t_V, t_n) e^{-\lambda_{01} \tau_n} \\ = \sum_{m=1}^{12} Z(t_V, t_m) (e^{-\lambda_{01} \tau_{m-1}} - e^{-\lambda_{01} \tau_m}) \end{aligned}$$

Допущение о временной структуре вероятностей дефолта – плоская структура. Используя **бутсрепинг**, конструируем временную структуру. (Начинаем с самого короткого свопа - 1Y: $\lambda_{01}, \tau = T - t_V$). Численно решаем уравнение (Ньютон-Рафсон, деление пополам).

Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS. Пример

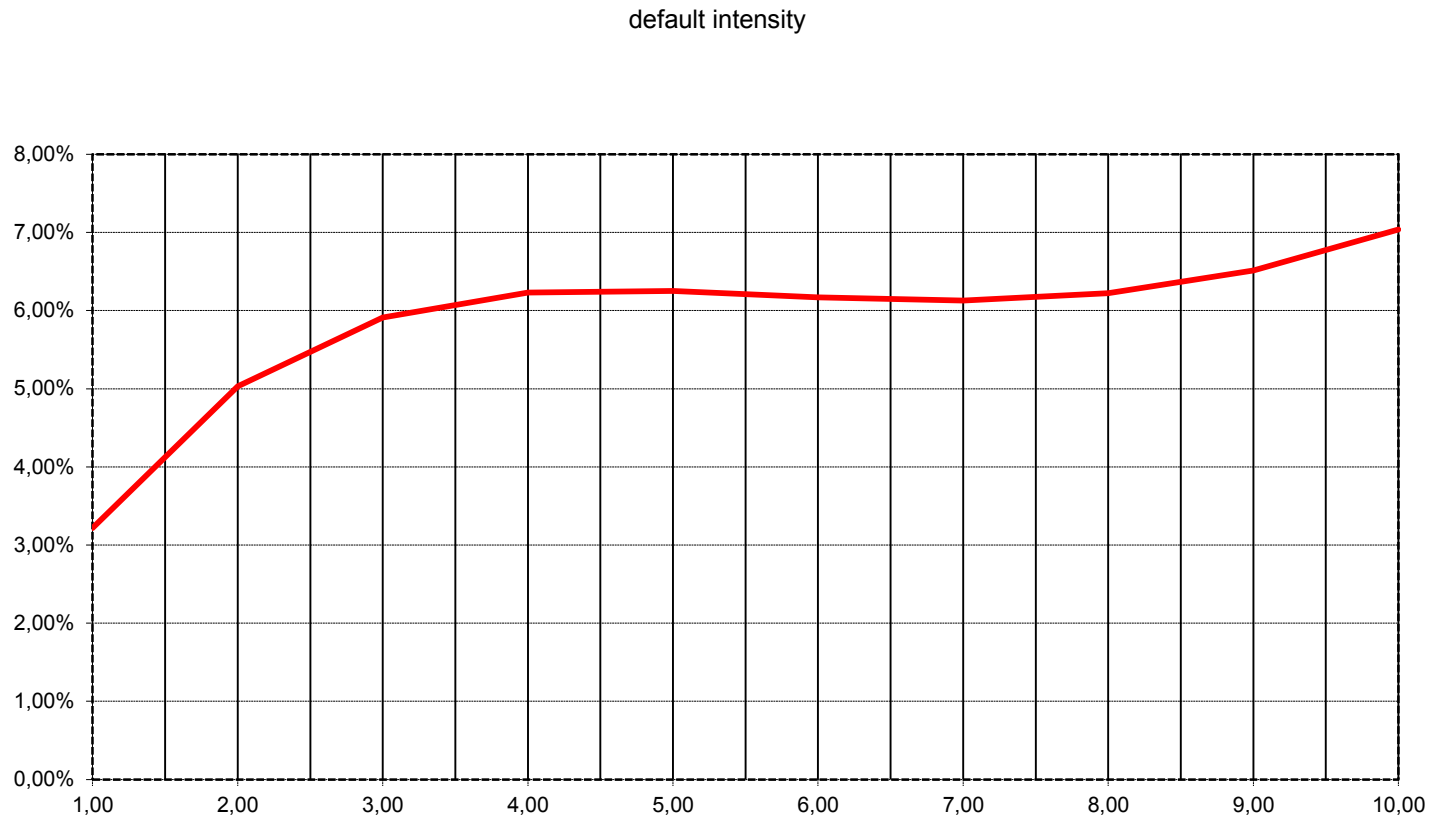
Пример. Котировки CDS ВТБ (данные на 04.06.2010г.):

Term	Market spread, bp	Market spread, %
1Y	239.83	2.40%
2Y	294.05	2.94%
3Y	321.52	3.22%
5Y	369.66	3.70%
7Y	379.81	3.80%
10Y	403.16	4.03%

Допущения:

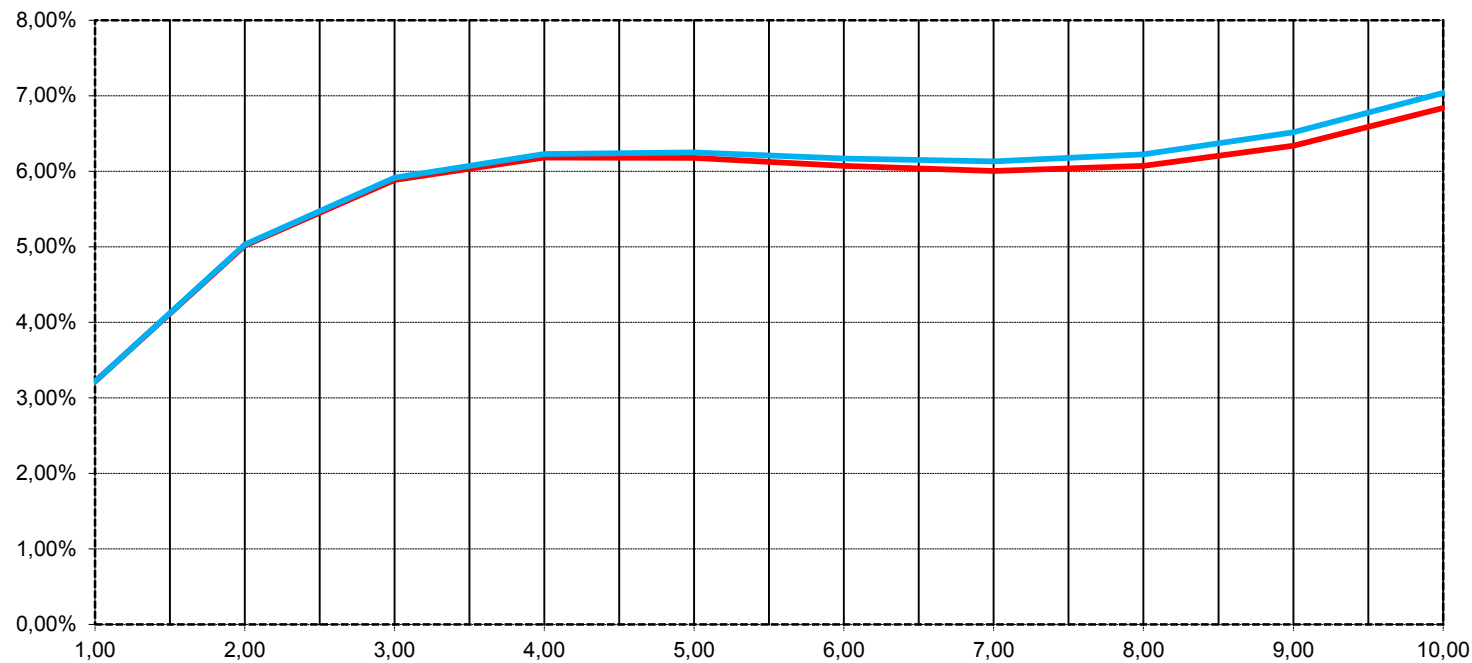
- коэффициент покрытия 40%;
- безрисковая кривая – US swar curve (сглаживание: Нельсон-Зигель);
- сглаживание для кривой вероятностей выживаемости: exponential cubic spline.

Оценка вероятности дефолта и ценообразование CDS. Пример



Сглаженная кривая. Временная структура интенсивности дефолта.

Credit triangle formula Vs. CDS pricing formula



Credit triangle formula approximation Vs. CDS pricing formula.

----- Credit triangle formula curve

----- CDS pricing formula curve

Структурная модель: основы

Модель Мертона. Разновидность моделей «причина-эффект».

Стоимость активов (V) = стоимость акций (S) + стоимость обязательств (\bar{B})

Basic Merton set-up (Merton, 1974):

Обязательства компании = 1 бескупонная облигация номиналом D со сроком погашения T . Нет смысла объявлять дефолт до даты T . Нет выплат, стоимость активов может вырасти (упущенная выгода).

Walk-away option: если Вы имеете на руках актив с отрицательной стоимостью (акции), Вам лучше от него избавиться.

Вероятность дефолта – вероятность того, что в момент T $V < D$.

Динамика V описывается GBM: $dV = \mu V dt + \sigma V dW$

Структурная модель: основы

Трудности: стоимость активов фирмы и волатильность стоимости активов фирмы - ненаблюдаемые величины.

В момент погашения долга T :

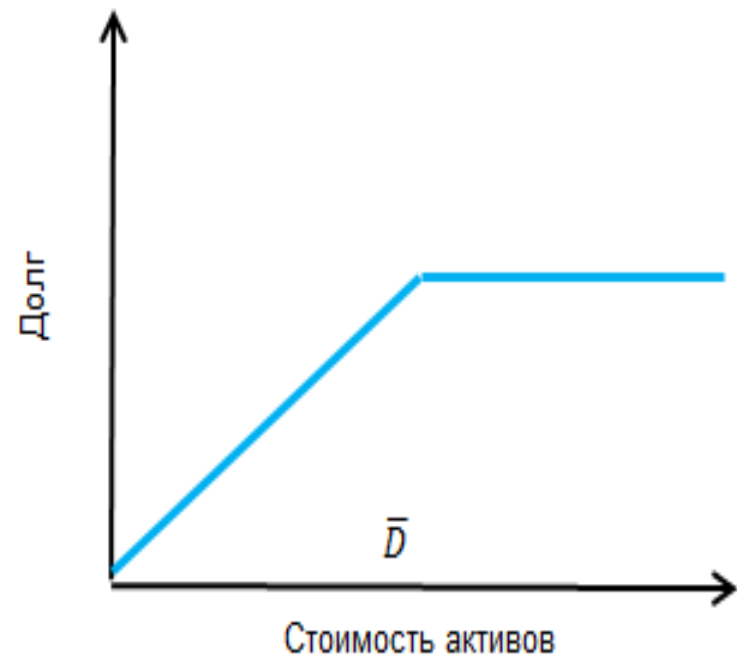
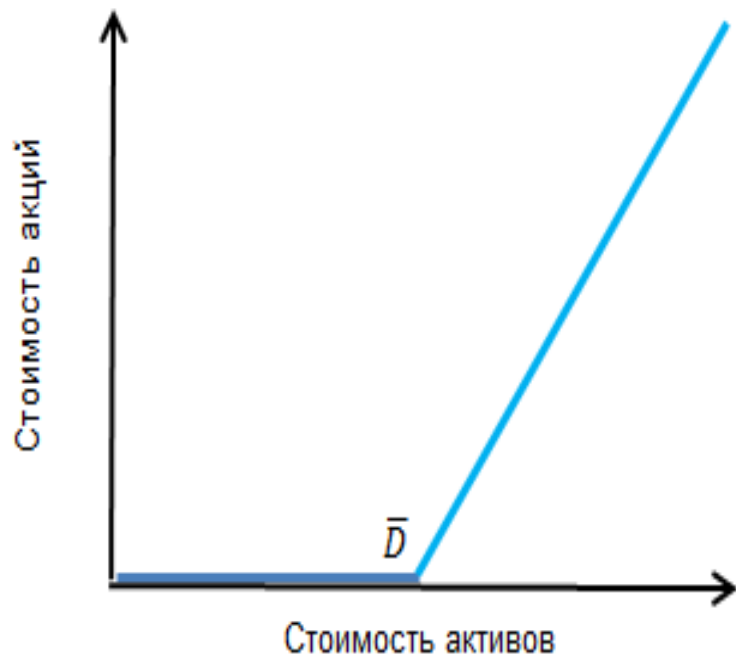
если $D > V(T)$, менеджеры/владельцы компании объявляют банкротство и передают контроль над фирмой кредиторам.

если $D < V(T)$, целесообразно сохранить контроль над активами.

Следуя логике (Black, Scholes, 1973) и (Merton, 1974) **акции и долг** можно рассматривать как **производные инструменты от стоимости активов фирмы V** . Выплаты по этим деривативам в момент T :

$$S(V, t) = \max(V - D, 0); \quad (V, t) = \min(D, V)$$

Структурная модель: основы



Структурная модель: основы

Выплата по акциям идентична выплате Европейского опциона колл на стоимость (активов) фирмы. Можно показать, что:

$$S(V, t) = C^{BS}(V, t, T, D, \sigma_V, r), \text{ где}$$

C^{BS} - цена Европ. колл-опциона на V с датой экспирации T и страйком D . Волатильность базового актива - σ_V , безрисковая ставка - r .

$$C^{BS}(V, t, T, D, \sigma_V, r) = VN(d_1) - e^{-r(T-t)}\overline{D}N(d_2), \text{ где}$$

$$d_1 = (\ln V/D + (r - \frac{1}{2} \sigma_V^2 (T - t))/(\sigma_V \sqrt{(T - t)})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{(T - t)}$$

Риск-нейтральная вероятность того, что компания объявит дефолт по долгу равна:

$$PD = N(-d_2)$$

Структурная модель: основы

Связь между волатильностью активов компании (σ_V) и волатильностью ее акций (σ_S)?

Стоимость акций компании есть функция от стоимости ее активов и времени.

Стоимость активов случайная величина, динамика которой задается геометрическим броуновским движением.

Если применим лемму Ито и преобразуем полученные уравнения:

$$S\sigma_S = V\sigma_V \frac{\partial C^{BS}}{\partial V} = V\sigma_V N(d_1)$$

Имеем систему из 2-х нелинейных уравнений. Наблюдаемые переменные в правой части и 2 ненаблюдаемые (V и σ_V) слева.

Систему можно **решить численно**. Solver Excel. Подбираем корни, удовлетворяющие заданным значениям S и σ_S .

Подход Moody's KMV

МКМВ использует показатель **Distance to default (DD)**.

$$DD = d_2$$

Члены r и $\frac{1}{2}\sigma_V^2$ отбрасываются как сравнительно малые, временной горизонт принимается равным 1 году ($T = 1$).

$$DD = \frac{\ln(V) - \ln(D)}{\sigma_V}$$

Т.е. расстояние между текущим значением V и точкой дефолта (D) в стандартных отклонениях.

Затем, Moody's калибрует на исторических данных показатель **EDF** (expected default frequency). EDF частота с которой фирмы с таким же DD объявляли дефолт ранее (по данным статистики).

Получаемая вероятность дефолта является не риск-нейтральной, а исторической или статистической.

Структурная модель: пример

ОАО «Аптечная сеть 36,6».

Дата расчета	Капитализация, руб.	Барьер/Долг, руб.	Волатильность акций	DD	PD
19.09.2008	26 598 100 000,00	7 163 395 868,10	96,65%	1,67	4,72%
19.05.2009	30 061 800 000,00	4 390 616 621,35	136,73%	1,12	13,04%
19.06.2009	23 083 100 000,00	4 228 530 956,70	134,63%	1,05	14,71%
26.06.2009	18 316 950 000,00	4 242 657 876,05	136,04%	0,91	18,12%

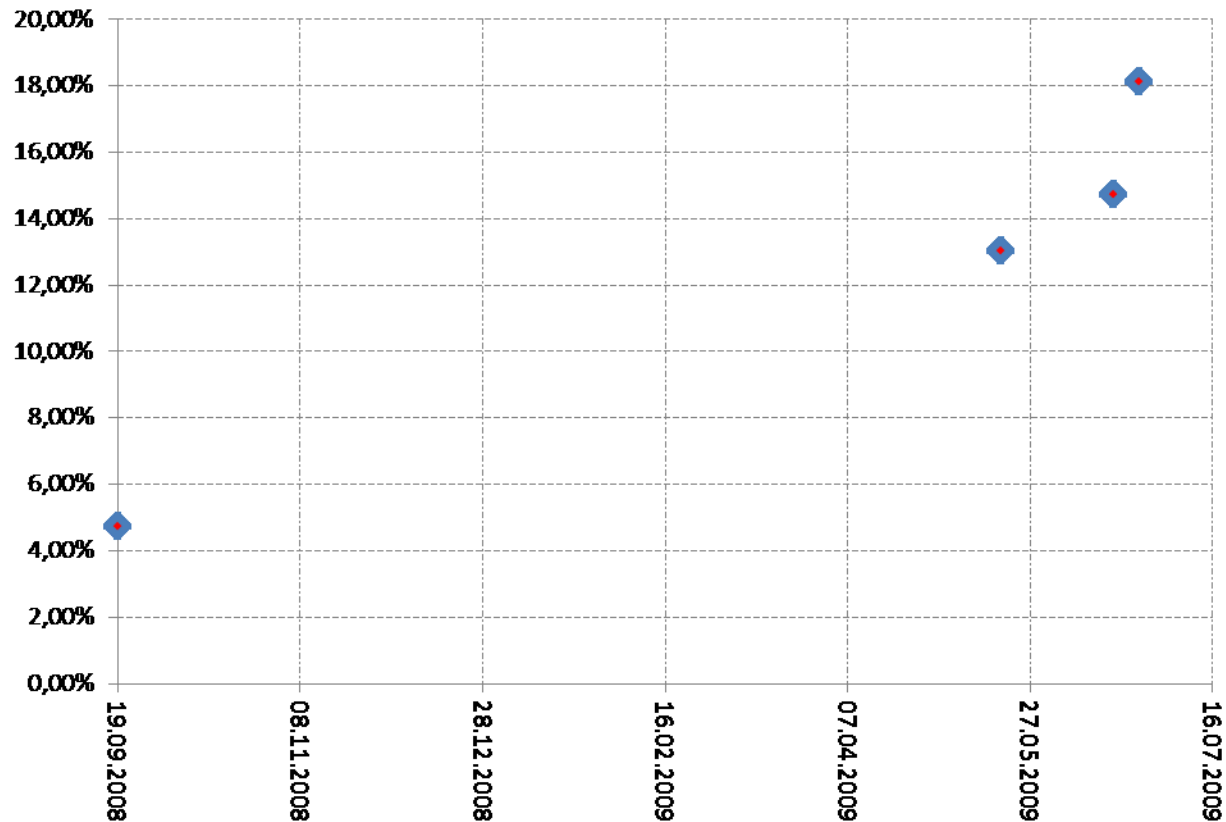
Источник данных о размере долговых обязательств - ежеквартальная отчетность по МСФО.

«Барьер» D равен сумме всех краткосрочных кредитов и займов компании и половине ее долгосрочных кредитов и займов.

Временной горизонт - 1 год (годовые риск-нейтральные подразумеваемые вероятности дефолта).

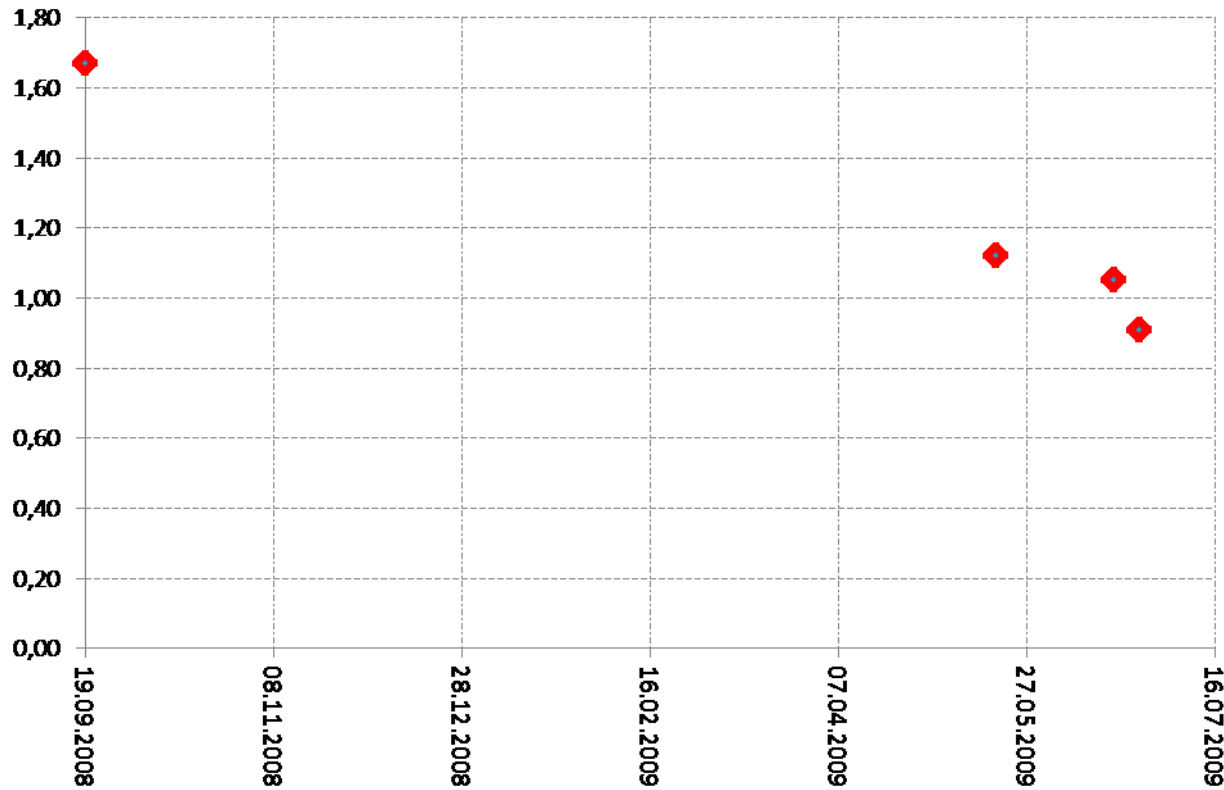
Базы для расчета капитализации и волатильности (исторической) акций котировки на ММВБ.

Структурная модель: пример



Динамика рассчитанного показателя PD для ОАО «Аптечная сеть 36,6»

Структурная модель: пример



Изменение во времени значения показателя расстояние до дефолта (DD).

Стоит ли этим заниматься? Несколько мыслей...

- рыночные цены могут агрегировать необходимую нам информацию. Более того, информации может быть больше, чем ее имеет каждый рыночный игрок в отдельности.
- диверсификация источников информации (собственная статистика, рейтинговые агентства, рыночные игроки). **Особенно важно для крупных exposures.**
- динамические индикаторы (рейтинговые агентства Vs. рынки).
- оценки согласованные с рынком (market consistency). Модель, основанная на ценах рыночных инструментов и калибруемая к ним, имеет **«иммунитет» к простым арбитражным стратегиям**, базирующимся на этих активах.
- извлекая implied PD из торгуемых активов, мы можем извлечь и **размер соответствующей риск-премии**, которую инвесторы платят за данный тип риска.

Насколько (без)опасно калибровать модель к рынку?

Кредитный рынок является неполным.

- имеется более чем одна мартингальная мера. Существует несколько кредитных кривых (спредов) и каждая кривая согласуется с заданным множеством цен калибровочных инструментов. Выбирая определенную кредитную кривую, мы выбираем определенную мартингальную меру.

Разумен вопрос и лучше задавать его себе постоянно!!!

Эффективен ли рынок???

- опасность того, что мы «подгоним» модель к «неправильным» и некорректным (истерия, манипуляции, отсутствие ликвидности и проч.) ценам калибровочных инструментов.

Сложности. Risk-neutral Vs. Historical

Грубой ошибкой является непонимание (менеджеры, специалисты) того, что историческая и риск-нейтральная оценка вероятности дефолта разные концепции.

Категорически нельзя:

- в целях ценообразования инструментов применять исторические вероятности дефолта (рассчитанные на основании статистических данных о количестве дефолтов в прошлом);
- использовать (без соответствующей трансформации) риск-нейтральную оценку PD в расчетах, требующих работы в «исторической», а не спот-мартингальной мере (калькуляция ожидаемых убытков по кредитному портфелю).

Трансформация: Risk-neutral PD → Historical PD

Сложности. Ежедневная практика

- **математика.** Отсутствие ошибок. Нельзя доверять никому.
- **имплементация.** Корректная реализация модели в компьютерном коде.
- **численные методы.** Эффективность, быстрота, экстремальные условия.
- **разумность.** Нет идеально реалистичных допущений (all models wrong...), важно понимать, что принятые допущения не критичны для наших целей.
- **соответствие реальности.** Способна ли модель описывать основные существенные риски которые случались в прошлом.
- **сложность.** Связки из нескольких моделей: для процентных ставок и интенсивности дефолтов, корреляции и т.п.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ
litvinovrv@uralsib.ru

Представленный в презентации материал является субъективным мнением автора и не может рассматриваться как официальная позиция ОАО «Уралсиб» в отношении рассматриваемых вопросов. Настоящая презентация предназначена исключительно для информационных целей. Несмотря на то, что данный материал был подготовлен с максимальной тщательностью, автор не дает никаких прямых или косвенных заверений или гарантий в отношении достоверности и полноты включенной в презентацию информации. Автор не несет никакой ответственности за любые прямые или косвенные убытки от использования настоящего материала или содержащейся в нем информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- **Black F. and Scholes M. (1973):** *The pricing of options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, vol. 81.
- **Duffie D. and Singleton K. (1999):** *Modeling Term Structures of Defaultable Bonds*, Review of Financial Studies, vol.12.
- **Duffie D. (1998):** *Defaultable Term Structure Models with Fractional Recovery of Par*, working paper, Stanford University.
- **Hull J. (2005):** *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice Hall.
- **Jarrow R.A. and Turnbull S.M. (1995):** *Pricing options on financial Securities Subject to Default Risk*, Journal of finance, vol.50.
- **Neftci S. (1996):** *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press.
- **Merton R. (1974):** *On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates*, Journal of finance, vol. 29.
- **O’Kane D. (2008).** Modelling single-name and multi-name credit derivatives, Wiley.
- **O’Kane D. and Turnbull S. (2003):** *Valuation of Credit Default Swaps*, Quantitative Credit research Quarterly, Vol.2003-Q1/Q2, Lehman Brothers.
- **O’Kane D. and Schlogl L. (2001):** *Modelling credit: theory and practice*, Lehman Brothers International Fixed Income Research.
- **Schonbucher P. (2003):** *Credit Derivatives Pricing Models*, Wiley.
- **Vasicek O. and Fong G. (1982):** *Term Structures Modeling Using Exponential Splines*, Journal of finance, vol. 37.
- **Литвинов Р. (2011):** *Оценка вероятности дефолта на основе рыночной информации. Модели сокращенной формы. ч.1*, Риск-менеджмент в кредитной организации, №4.
- **Литвинов Р. (2012):** *Оценка вероятности дефолта на основе рыночной информации. Модели сокращенной формы. ч.2*, Риск-менеджмент в кредитной организации, №1.
- **Литвинов Р. (2012):** *Оценка вероятности дефолта на основе рыночной информации. Структурные модели*, Риск-менеджмент в кредитной организации, №1.